Concours Commun I.N.A. - E.N.S.A.

1985

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 3 heures

Soit n un entier naturel. On considère :

$$E_n = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P = 0 \text{ ou } d^\circ P \leqslant n \}$$

F_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} (x - 1)^n (x + 1)^n$$

P_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\ P_n(x) = \dfrac{d^n F_n}{dx^n}(x) = F_n^{(n)}(x)$

$\left(\dfrac{d^n F_n}{dx^n}\right.$ désignant la dérivée $n^{ième}$ de F_n par rapport à $\left.x\right)$.

En particulier $P_0(x) = 1$.

Partie 1

1.1. Démontrer que P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

1.2. Soit $k \in \{ 0, 1, 2, \ldots n \}$. On note $B_{n,k}$ le polynôme défini par

$$B_{n,k}(X) = (X + 1)^k (X - 1)^{n-k}$$

a. Démontrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots B_{n,k}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de E_n.

b. En utilisant la formule de Leibniz dans le calcul de

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n n!}(x - 1)^n (x + 1)^n\right]$$

démontrer que :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} (C_n^k)^2 B_{n,k}(X)$$

c. En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$

d. En utilisant l'expression de P_n obtenue au (*b*), prouver que :

$$P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

Étudier la parité de P_n suivant les valeurs de n.

1.3. On considère ici que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un entier naturel $0 \leqslant p \leqslant n - 1$

a. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n^{(p)}(x) = \frac{d^p F_n(x)}{dx^p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!} C_n^k C_n^{p-k} B_{2n-p,n-k}(x)$$

b. En déduire que $F_n^{(p)}(1) = 0$ et $F_n^{(p)}(-1) = 0$

c. En utilisant le théorème de Rolle, démontrer que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1, +1[$.

Partie 2

Soit k un entier naturel. On note

$$I_k = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^k \, dx \quad \text{et} \quad J_k = \frac{(2k + 1)!}{(k!)^2} I_k$$

2.1. Si $k \in \mathbb{N}^*$ déterminer une relation simple entre I_k et I_{k-1}

Démontrer que $\frac{J_k}{J_{k-1}} = 4$. En déduire la valeur de J_k, puis de I_k.

2.2. Soit p un entier naturel, $0 \leqslant p \leqslant n$

On note

$$u_p = (-1)^p \int_{-1}^{+1} F_n^{(p)}(x) \cdot F^{(2n-p)}(x)\, dx$$

a. Pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$, montrer que $u_{p+1} - u_p = 0$. Calculer u_0.

b. En déduire la valeur de u_n, puis la valeur de $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx$.

2.3. Si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, on note

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

2.3.1. Vérifier que :

a. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ (P \mid Q) = (Q \mid P)$

b. $\forall (R_1, R_2, Q) \in \mathbb{R}[X]^3,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$
$(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \mid Q) = \lambda_1 (R_1 \mid Q) + \lambda_2 (R_2 \mid Q)$

c. $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P \mid P) > 0 \Leftrightarrow P \neq 0$

On dira que P et Q sont orthogonaux si et seulement si $(P \mid Q) = 0$

2.3.2. En utilisant (1, 3 *b*), démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (d^\circ P = 0) \Rightarrow \big((P \mid P_n) = 0\big)$$

2.3.3. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré p
$(1 \leqslant p \leqslant n-1) \qquad (n \geqslant 2)$

Pour $0 \leqslant k \leqslant p$, on pose $v_k = (-1)^k \int_{-1}^{+1} P^{(k)}(x)\ F_n^{(n-k)}(x)\, dx$

Calculer $v_{k+1} - v_k$ (pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$) et v_p.

En déduire la valeur de v_0 et de $(P \mid P_n)$

2.3.4. Si m et n sont deux entiers naturels, calculer $(P_m \mid P_n)$

2.4. *a.* Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E_n.

b. Comment faut-il choisir le scalaire a pour que

$$d^\circ [X P_{n-1}(X) - a P_n(X)] \leqslant n-1$$

c. Déduire du (*b*) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} x \cdot P_{n-1}(x) \cdot P_n(x)\, dx$$

Partie 3

Cette partie utilise les résultats obtenus dans la partie 2.

n désigne ici un entier naturel supérieur ou égal à 3.

3.1. Démontrer qu'il existe un $(n+1)$ uplet unique $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad x P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)$$

Pour p entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n-3$, calculer de deux façons différentes $\int_{-1}^{+1} x P_{n-1}(x) \cdot P_p(x)\, dx$. En déduire que $\lambda_p = 0$

3.2. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (-1)^{n-1} x P_{n-1}(x) + (-x) \cdot P_{n-1}(-x) = 0$$

(on utilisera 1.2.*d*.).

En déduire que $\lambda_{n-1} = 0$

3.3. En calculant $\Big(X P_{n-1}(X) \mid P_n(X)\Big) = \int_{-1}^{+1} x P_{n-1}(x) \cdot P_n(x)\, dx$, déterminer la valeur de λ_n.

3.4. En utilisant la relation du 3.1. pour $x = 1$, prouver que $\lambda_n + \lambda_{n-2} = 1$

En déduire la relation :

$$\forall n \geqslant 3,\quad X P_{n-1}(X) = \frac{n}{2n-1} P_n(X) + \frac{n-1}{2n-1} P_{n-2}(X)$$